www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de Mathématiques

Concours 1989

Durée : 3 heures

Convention : Si f est une application linéaire de E vers F et si E' est un sous-espace vectoriel de E, $f|_{E'}$ désigne la restriction de f à E'.

Partie I.

Soient le vecteur $V = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et la matrice C définie par

$$C = (c_{ij}) \text{ où } (i,j) \text{ décrit } \{1, 2, ..., n\}^2$$

avec

i) $\forall\, i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ $c_{i,i+1} = 1$

ii) $\forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}$ $c_{nj} = -a_{j-1}$

iii) sinon $c_{ij} = 0$.

une matrice de ce type sera dite de type compagne.

On désignera par γ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ par C et par δ l'endomorphisme représenté par la matrice ${}^tC$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de C est $Q(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$.

2. A quelle condition sur V la matrice C est-elle inversible ?

3. Préciser le rang de C en fonction de V ?

4. Que vaut Q(C) ?

5. On construit la famille de vecteurs suivante :

Pour $i = 1, 2, ..., n-1$ $\quad \varepsilon_i = e_{n-i+1} + \sum_{j=1}^{n-i} a_{j+i-1}\, e_j$

$\varepsilon_n = e_1$

a. Montrer que c'est une base de $\mathbb{C}^n$.

b. On pose

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Comparer ${}^tC.T$ et $T.C$.

c. Préciser la matrice de δ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$.

6. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux.

a. Montrer que les matrices I_n, A, A^2, A^3, ..., A^{n-1} sont linéairement indépendantes (I_n désigne la matrice unité).

.../...

b. Montrer qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre I_n, A, A^2, ..., A^n.

c. Montrer qu'il existe une matrice C de type compagne, telle que ${}^tC$ soit semblable à la matrice A.

7. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux est semblable à sa transposée.

8. Soit B une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, diagonalisable, montrer que B est semblable à sa transposée.

Partie II.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ les n racines complexes de Q(X).

1. Montrer que, quel que soit i appartenant à $\{1, 2, ..., n\}$, le vecteur V_i où

$$V_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de C. Préciser la valeur propre associée.

2. Soit la matrice M dont les vecteurs-colonnes sont $V_1, V_2, ..., V_n$; montrer que C.M = M.D où D est diagonale.

3. On supposera dans cette partie (II.3, 4, 5) que les complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont distincts deux à deux.

a. Déterminer une base dans laquelle γ est représenté par une matrice diagonale.

b. Calculer $(M.{}^tM)^{-1}.C.(M.{}^tM)$.

4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ diagonalisable dont les valeurs propres sont distinctes deux à deux ; montrer que si l'endormorphisme g de $\mathbb{C}^n$ vérifie :

$$g \circ f \circ g^{-1} = f$$

alors la restriction de g à tout sous-espace propre de f est une homothétie.

5. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ telle que ${}^tM.T.M = \Delta$.

Partie III.

On supposera cette fois que les complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont quelconques.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $\det(P(C)) = \prod_{i=1}^{n} P(\lambda_i)$.

.../...

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur le déterminant de P(C), pour que P(X) et Q(X) soient premiers entre eux.

3. Soit $P(X) = b_0 + b_1 X + ... + b_{n-1} X^{n-1}$.

   a. Montrer que la première ligne de P(C) est $L = (b_0, b_1, ..., b_{n-1})$.

   b. Déterminer $\min \{ d \in \mathbb{N}^* / \exists R \in \mathbb{C}[X]$ de degré d tel que $R(C) = 0 \}$

4. Montrer que, si L_i désigne la ième ligne de P(C), on a : $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ $L_{i+1} = L_i.C$.

Partie IV.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que $(\delta^k(e_1))_{k = 0, ..., n-1}$ forme une base de $\mathbb{C}^n$.

2. On suppose que $Q(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \mu_j)^{m_j}$

   où les μ_j sont les racines distinctes de Q(X) et les m_j leurs multiplicités.

   On désigne par $(D_{j,k}(X))$ le polynôme $\frac{Q(X)}{(X - \mu_j)^k}$ où $j \in \{1, 2, ..., p\}$ et $k \in \{1, 2, ..., m_j\}$.

   Montrer que les $(D_{j,k}(X))_{\substack{k \in \{1, ..., m_j\} \\ j \in \{1, ..., p\}}}$ forment une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$(on pourra utiliser l'existence des décompositions en éléments simples des fractions rationnelles $\frac{X^l}{Q(X)}$ $(l \in \mathbb{N})$).

3. On pose $E_j = \text{Vect}(\{(D_{j,k}(\delta))(e_1)\}_{k \in \{1, ..., m_j\}})$.

   a. Montrer

   $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $(\delta - \lambda \text{ Id})^m \in \text{Vect}((\delta - \mu \text{ Id})^s \circ ((\mu - \lambda) \text{ Id})^{m-s})_{s \in \{0, ..., m\}}$

   b. Montrer que

   $$\forall j \in \{1, ..., p\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad (\delta - \lambda \text{ Id})^m (E_j) \subset E_j$$

4. *a.* Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$.

   b. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{p} \text{Ker}((\delta - \mu_j \text{ Id})^{m_j})$

   c. Montrer que $\forall j \in \{1, ..., p\}$ $E_j = \text{Ker}((\delta - \mu_j \text{ Id})^{m_j})$

   d. Montrer que si $\lambda \neq \mu_j$ alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $(\delta - \lambda \text{ Id})^m |_{E_j}$ est un automorphisme de E_j.

   e. Exprimer $\dim(\text{Ker}((\delta - \mu_j \text{ Id})^m))$ en fonction de m_j et de m.

5. Soit P(X) un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ayant r racines communes avec Q(X) : $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ avec les multiplicités respectives $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_r$.
   Montrer qu'alors $\text{rang}(P(C)) = n - \sum_{j=1}^{r} \inf(m_j, \eta_j)$.

6. Montrer que le rang de P(C) est égal à n - degré (pgcd (P,Q)).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail